

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. LANCONELLI

ALCUNI RISULTATI SUL PROBLEMA DI DIRICHLET ESTERNO
PER EQUAZIONI DI POISSON SEMILINEARI

3 MARZO 1988

Sunto. Esporremo alcuni risultati di Coffman-Marcus [CM] e di Benci-Cerami [BC] sull'esistenza di soluzioni positive del problema di Dirichlet

$$(*) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(u) & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

dove $\lambda > 0$, Ω è un dominio esterno di \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, opportuna, tale che $f(u) = o(u)$ per $u \rightarrow 0$.

§ 1. PRELIMINARI. ITERAZIONE MONOTONA. Chiamiamo *dominio esterno di* \mathbb{R}^n ogni aperto Ω di \mathbb{R}^n tale che $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ è compatto. Supporremo sempre

$$0 \in \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega).$$

In questo paragrafo, e nel successivo, supporremo inoltre

$$\partial\Omega \in C^{2,\alpha} \quad \text{con } 0 < \alpha < 1.$$

Sia r la soluzione fondamentale in \mathbb{R}^n dell'operatore $-\Delta + 1$. Allora, se $n \geq 3$,

$$(1.1) \quad r(x) = |x|^{-\frac{n-2}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(|x|)$$

dove $K_{\frac{n-2}{2}}$ indica la funzione di Bessel modificata di ordine $\frac{n-2}{2}$. In particolare

$$(1.3) \quad \begin{cases} K_{\frac{n-2}{2}}(x) |x|^{-1/2} e^{-|x|}, & \text{per } |x| \rightarrow +\infty, \\ K_{\frac{n-2}{2}}(x) \approx |x|^{-\frac{n-2}{2}}, & \text{per } |x| \rightarrow 0. \end{cases}$$

Per ogni $x \in \Omega$ indichiamo ora con h_x la soluzione del problema di Dirichlet (esterno)

$$(-\Delta + 1)h = 0 \text{ in } \Omega$$

$$h(y) = \Gamma(x-y) \quad y \in \partial\Omega, \quad h(y) \rightarrow 0 \text{ per } |y| \rightarrow +\infty$$

Allora $h \in C^\infty(\Omega) \cap C_{loc}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ e

$$h_x(y) = O(\Gamma(x-y)) \text{ per } |x-y| \rightarrow +\infty$$

La funzione

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) - h_x(y) \quad , \quad x, y \in \Omega \quad , \quad x \neq y$$

è la funzione di Green di Ω . Se $u \in C_0^\infty(\Omega)$, posto $v = -\Delta u$ si ha

$$(1.4) \quad u(x) = \int_{\Omega} G(x,y) v(y) dy.$$

Ovviamente $0 \leq G \leq \Gamma$ e quindi

$$G(x,y) = O(|x-y|^{-\frac{n-1}{2}} e^{-|x-y|}) \text{ per } |x-y| \rightarrow +\infty.$$

Inoltre

$$G(x,y) \equiv |x-y|^{-(n-2)} \text{ per } |x-y| \rightarrow 0, \quad x \in \Omega.$$

Estendiamo ora G all'intero spazio $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ponendo

$$(1.5) \quad G(x,y) = G(y,x) = 0 \quad \text{per } y \notin \bar{\Omega}$$

Consideriamo lo spazio (di Banach)

$$(1.6) \quad Y = \{u \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) / \lim_{|x| \rightarrow +\infty} e^{|x|/2} u(x) = 0\}$$

con la norma

$$(1.7) \quad \|u\|_Y = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} e^{|x|/2} |u(x)|$$

Calcoli standard provano che l'operatore

$$(1.8) \quad (Gu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x,y) u(y) dy$$

applica Y in sé ed è *compatto*. Inoltre, per ogni $u \in Y$,

$$G(u) \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad (Gu)(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Inoltre, se $u \in C_{loc}^\alpha(\bar{\Omega})$ allora $Gu \in C_{loc}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Consideriamo ora il problema di Dirichlet

$$(1.9) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = g(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \quad u \in Y \end{cases}$$

dove $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è *localmente α -hölderiana* in x e *localmente lipschitziana* in u , uniformemente in x .

Inoltre

$$g(x, y) = 0(u) \text{ per } u \rightarrow 0, \text{ uniformemente in } x.$$

Utilizzando l'operatore G definito in (1.6), il problema (1.9) si può trattare seguendo lo schema di *iterazione monotona* usato da Sattinger ([S]) nel caso di domini limitati.

Una funzione $\phi \in C^2(\Omega) \cap C_{loc}^\alpha(\bar{\Omega})$, Y , $0 < \alpha < 1$, è una *sopra soluzione* di (1.9) se risulta

$$\begin{cases} -\Delta \phi + \phi \geq g(\phi) & \text{in } \Omega \\ \phi \geq 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Analogamente, sostituendo \geq con \leq , si definisce la nozione di *sottosoluzione* di (1.9).

Teorema 1.1. Se esistono, per il problema (1.9), una *soprasoluzione* ϕ ed una *sottosoluzione* ψ tali che

$$\psi \leq \phi,$$

allora (1.9) ha una soluzione $u \in C_{loc}^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap Y$ tale che

$$\psi \leq u \leq \phi$$

Dimostrazione. Per ogni $u \in Y \cap C_{loc}^\alpha(\bar{\Omega})$ poniamo

$$(Tv)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y) g(y, u(y)) dy$$

Supponiamo ora $g(x, \cdot) \nearrow$. Allora, se $\psi \leq u \leq \phi$, risulta

$$(1.10) \quad T\psi \leq Tv \leq T\phi \quad \text{in } \Omega$$

Infatti:

$$(-\Delta+1)(\phi) \geq g(x, \phi) \quad \text{in } \Omega, \quad \phi \geq 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

$$(-\Delta+1)(Tu) = g(x, \phi) \quad \text{in } \Omega, \quad Tu = 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

e quindi

$$(-\Delta+1)(\phi-Tu) \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (\phi-Tu) \geq 0 \quad \text{su } \partial\Omega.$$

D'altra parte, essendo $\phi, Tu \in Y$,

$$(\phi-Tu)(x) \rightarrow 0 \quad \text{per } |x| \rightarrow +\infty$$

Per il principio di massimo ne viene che $\phi-Tu \geq 0$ in Ω . Analogamente si prova che $\psi-Tu \leq 0$ in Ω .

Definiamo ora una successione (v_k) nel modo seguente:

$$v_1 = T\phi$$

$$v_{k+1} = Tv_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Dalla (1.10), per induzione, si ricava

$$\psi \leq v_{k+1} \leq v_k \leq \phi \quad \text{in } \Omega, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Per le proprietà di compattezza di G è facile provare ora che (v_k) converge in

Y ad una funzione $v \in Y$.

Allora, da $v_{k+1} = Tv_k$, si ricava

$$(1.11) \quad v(x) = \int_{R^n} G(x,y)g(y,v(y))dy$$

Questo implica $v \in C^{0,1}(R^n)$ e, quindi, $v \in C_{loc}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Di conseguenza, ancora per la (1.11),

$$(-\Delta + 1)(x) = g(x, v(x)) \text{ in } \Omega, \quad v = 0 \text{ su } \partial\Omega.$$

Questo prova il teorema nel caso di g crescente in u . In generale basta studiare il problema

$$(-\Delta + 1 + L)v = (g(x, v) + L)v$$

con $L = \sup\left\{\frac{|g(x, u) - g(x, v)|}{|u - v|} : x \in \bar{\Omega}, u \neq v, \psi \leq u, v \leq \phi\right\}$.

Osservazione. Se $f(u) \leq g(x, u) \leq \bar{f}(u)$, ogni soluzione *positiva* u del problema

$$(1.12) \quad \begin{aligned} -\Delta u + u &= \bar{f}(u) \quad \text{in } R^n \\ u &\in Y \end{aligned}$$

è una soprasoluzione di (1.9).

In linea di principio, per determinare sottosoluzioni di (1.9) si può procedere nel modo seguente.

Supponiamo

$$\bar{\Omega} \subseteq \{x \in R^n / |x| > R\} \equiv \Omega_R$$

e, per ogni $m \in \mathbb{R}$, $m \leq 0$, consideriamo il problema

$$(1.13) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f(u) \\ u = m \text{ su } \partial\Omega_R, \quad u \in Y \end{cases}$$

Evidentemente ogni soluzione di (1.13) è una sottosoluzione di (1.9) se risulta $u \leq 0$ su $\partial\Omega$.

Si può allora pensare che, se

$$\partial\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid R < |x| < R + \delta\}$$

e se δ è convenientemente piccolo, esistano delle costanti $m \leq 0$ tali che le (eventuali) soluzioni di (1.13) verificano la condizione $u \leq 0$ su $\partial\Omega$.

§ 2. SOLUZIONI POSITIVE IN DOMINI ESTERNI QUASI-SFERICI. In questo paragrafo esporremo i risultati di Coffman e Marcus [CM]. Sia Ω un dominio esterno di \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, con $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Supponiamo che esistano $R, \delta > 0$ tali che

$$(2.1) \quad \partial\Omega \subset \{R - \delta < |x| < R + \delta\}$$

Sia G la funzione di Green per Ω , relativamente all'operatore $-\Delta + 1$, prolungata su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ come nella (1.5). Indichiamo inoltre con G_1 la corrispondente funzione di Green per

$$\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| > R\}.$$

Vogliamo determinare una soluzione positiva w del problema

$$(2.2) \quad \begin{cases} (-\Delta+1) w = f(w) & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega, \quad w \in Y \end{cases}$$

come punto fisso, non banale, dell'operatore G :

$$(2.3) \quad w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x,y) f(w(y)) dy.$$

Seguendo Coffman e Marcus ([CM]) poniamo

$$(2.4) \quad g = G - G_1 \quad \text{e} \quad v = w - u$$

dove u è una soluzione positiva del problema radiale

$$(2.5) \quad \begin{cases} (-\Delta+1)u = f(u) & \text{in } \Omega_R \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega, \quad u(x) \rightarrow 0 \text{ per } |x| \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Ipotesi standard su f , che preciseremo più avanti, garantiscono che (2.5) ha effettivamente soluzioni positive $u \in Y$ (Cfr. [EL]) con queste notazioni la (2.3) pu essere scritta nel modo seguente

$$v(x) + u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x,y) f(w(y)) dy + \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x,y) f(w(y)) dy$$

Supponiamo ora

$$(2.6) \quad f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Allora

$$(2.7) \quad f(w(y)) = f(u(y)) + f'(u(y))v(y) + N(x, v(x))$$

dove

$$(2.8) \quad N(x, v(x)) = O(v^2(x)) \quad \text{per } v \rightarrow 0, \text{ uniformemente su } \mathbb{R}^n.$$

Pertanto

$$v(x) + u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x, y) f(w(y)) dy + \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x, y) (f(u(y)) + f'(u(y))v(y) + N(y, v(y))) dy$$

e quindi, poichè

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x, y) f(u(y)) dy,$$

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x, y) f'(u(y)) v(y) dy =$$

(2.9)

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(x, y) f(w(y)) dy + \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x, y) N(y, v(y)) dy$$

Scriveremo (2.9) nel modo seguente

$$(2.10) \quad Tv = Sv.$$

Ora, fissato $\varepsilon_1 > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che (Cfr. (2.1) e (2.4))

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} e^{|x|^2} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x, y)| e^{-|y|^2/2} dy \leq \varepsilon_1.$$

Allora, tenendo conto anche della (2.8),

$$|Sv|_Y \leq C(|v|_Y^2 + \epsilon_1 |w|_Y) \leq C(|v|_Y^2 + \epsilon_1(|u|_Y + |v|_Y))$$

e quindi, se $|v| \leq \rho$ e $\epsilon_1 = \rho^2$,

$$|Sv|_Y \leq C\rho^2(1+|u|_Y + \rho)$$

Fissato quindi $\epsilon > 0$ esiste $\rho > 0$ tale che

$$(2.11) \quad |Sv|_Y \leq \epsilon \rho \quad \text{se} \quad |v| \leq \rho$$

e se δ (nella (2.1)) è convenientemente piccolo.

Supponiamo ora che l'operatore T sia invertibile. Ciò equivale a supporre che

$$(2.12) \quad \begin{cases} \lambda = 1 \text{ non è un autovalore del problema} \\ (-\Delta + 1)v = \lambda f'(u)v \quad \text{in } \Omega_R \end{cases}$$

(si noti che $T = I +$ operatore compatto). Allora (2.10) è equivalente alla seguente

$$(2.13) \quad v = T^{-1} Sv$$

Dalla (2.11), scegliendo ϵ sufficientemente piccolo, si trae

$$|T^{-1}Sv|_Y \leq \rho \quad \text{se} \quad |v|_Y \leq \rho$$

Ma allora, poichè S è compatta (come si verifica facilmente), $T^{-1}S$ ha un punto fisso v . Quindi v è soluzione di (2.13) e, di conseguenza, $w = u+v$ è soluzione di (2.2).

La positività di w segue poi da quella di v , scegliendo

la costante δ in (2.1) convenientemente piccola.

Il metodo ora illustrato fornisce una soluzione positiva di (2.2) se vale (2.12). Coffman e Marcus hanno provato, nel caso di $n = 3$ e di f verificante oltre alla (2.6), le seguenti ipotesi:

$$(A) \quad \begin{cases} f(0)=0, f(t)>0 \text{ per } t>0, f(t) = O(|t|^{1+\epsilon_0}) \text{ per } t \rightarrow 0, \\ tf'(t) \geq (1+\epsilon_2)f(t) \text{ per } t > 0, \quad \epsilon_0, \epsilon_2 > 0 \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} f \text{ si prolunga analiticamente sull'aperto} \\ \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z > -\sigma, |I_m z| < \sigma\}, \quad \sigma > 0 \text{ opportuno} \end{cases}$$

il seguente risultato: esiste un insieme E , al più numerabile, $E \subset \mathbb{R}^+$, tale che la condizione (2.12) è verificata per ogni $R \notin E$.

§ 3. In questo paragrafo esporremo, molto succintamente, un risultato di Benci e Cerami [BC] relativo all'esistenza di soluzioni positive del problema

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

dove Ω è un dominio esterno di \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, e $2 < p < \frac{2n}{n-2}$. In [BC] si ricercano soluzioni di (3.1) come punti critici del funzionale

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx$$

dove

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (|Du|^2 + \lambda u^2) dx$$

(in questo ultimo integrale, se $u \in H_0^1(\Omega)$, conveniamo di porre $u(x) = 0$ per $x \notin \bar{\Omega}$).

La difficoltà principale che si incontra affrontando (3.1) con tecniche variazionali, risiede nel fatto che il funzionale I non verifica la condizione di Palais-Smale ad ogni livello $c \in \mathbb{R}^+$, a causa della mancanza di compattezza dell'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L_p(\Omega)$ con $2 < p < \frac{2n}{n-2}$. Benci e Cerami riescono tuttavia ad individuare dei livelli $c \in \mathbb{R}^+$ ai quali I verifica la condizione $(PS)_c$ nel cono positivo di $H_0^1(\Omega)$:

$$(PS)_c^+ \begin{cases} I(u_m) \rightarrow c, u_m \geq 0 \\ \|dI(u_m)\| \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow (u_m) \text{ ha una sottosuccessione convergente fortemente in } H_0^1(\Omega).$$

Il procedimento è il seguente. Se poniamo

$$M = \min\{\|u\|^2 / u \mid u \in H^1(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx = 1\}$$

esiste una funzione $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $v \geq 0$, che realizza tale minimo (Cfr. [BL]). Una semplice applicazione del teorema di Lagrange-Ljusternik permette di verificare che, posto $u = M^{1/p-2} v$, allora

$$(3.2) \quad -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2} u$$

Inoltre

$$(3.3) \quad I^*(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M^{p/p-2} \equiv M_p$$

Sia ora $c \in]M_p, 2M_p[$ e sia (u_m) una successione in $H_0^1(\Omega)$ tale che: $u_m \geq 0$ e

$$I(u_m) \rightarrow c, \quad \|dI(u_m)\| \rightarrow 0 \quad \text{per } m \rightarrow \infty$$

Allora ([BC], Lemma 3.1) esiste una sottosuccessione di (u_m) , che indicheremo ancora con (u_m) , tale che

$$u_m(x) = u_m^{(0)}(x) + \sum_{j=1}^k u_m^{(j)}(x - y_m^{(j)})$$

con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ indipendente da m , $y_m^{(j)} \rightarrow \infty$ per $m \rightarrow \infty$ e:

$$(i) \quad u_m^{(0)} \rightarrow u^{(0)} \quad \text{in } H_0^1(\Omega)$$

$$(ii) \quad u_m^{(j)} \rightarrow u^{(j)} \quad \text{in } H_0^1(\mathbb{R}^n)$$

$$(iii) \quad u^{(0)} \geq 0 \text{ è soluzione di (3.1)}$$

$$(iv) \quad u^{(j)} \geq 0 \text{ è soluzione di}$$

$$(3.4) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{in } \mathbb{R}^n \\ u \in H^1(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

$$(v) \quad c = I(u^{(0)}) + \sum_{j=1}^k I^*(u^{(j)})$$

Ma ora ([MS] e [KK]) il problema (3.3) ha al più una soluzione $\bar{u} \geq 0$, $\bar{u} \neq 0$. Allora

$$(3.5) \quad c = I(u^{(0)}) + kI^*(\bar{u}), \quad \bar{u} = u^{(1)} = \dots = u^{(k)}$$

Ma, per la (3.3)

$$I^*(\bar{u}) = M_p \quad \text{se } \bar{u} \neq 0$$

Dalla (3.5) e dalla condizione

$$M_p < c < 2M_p$$

si ricava $k = 0$ e $I(u^{(0)}) \neq 0$. In particolare $u^{(0)} \neq 0$ e (u_m) converge fortemente ad $u(0)$.

In [BC] viene poi provato che esiste, effettivamente, almeno un $c \in]M_p, 2M_p[$ tale che

$$\{u \in H_0^1(\Omega) / I(u) = c\} \neq \emptyset,$$

purchè $\text{diam}(R^n \setminus \Omega) < \delta$, con $\delta > 0$ opportuno.

A questo punto, le usuali tecniche variazionali per la determinazione di punti critici, consentono di provare, in modo standard, il seguente

Teorema 3.1. Esiste $\delta > 0$ tale che, se $\text{diam}(R^n \setminus \Omega) < \delta$ allora il problema (3.1) ha almeno una soluzione positiva.

BIBLIOGRAFIA

- [BC] V. BENCI-G. CERAMI, Positive solutions of some nonlinear elliptic problems in exterior domain, Arch. Rat. Mech. and An. 99 (1987) 283-300.
- [BL] H. BENESTYCKI-P.L. LIONS, Non linear scalar field equations, Arch. Rat. Mech. and An. 82 (1983) 313-346.
- [CM] C.V. COFFMAN-M.M. MARCUS, Superlinear elliptic Dirichlet problems in almost spherically symmetric exterior domains, Arch. Rat. Mech. and An. 96 (1986) 167-197.
- [EL] M.J. ESTERBAN-P.L. LIONS, Existence and non-existence results for semi-linear elliptic problem in unbounded domains, Proc. Royal Edinburgh Soc. 93 (1982) 1-14.
- [KK] K. KWONG, Preprint.
- [MS] K.Mc-LEOD-J. SERRIN, Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in R^n , Arch. Rat. Mech. and An. 99 (1987) 115-145.
- [S] D.H. SATTINGER, Topics in stability and bifurcation theory, Lecture Notes in Math. 309 (1973), Springer-Verlag.